ENSAIT
Ecole Nationale Supérieure des Arts et Industries Textiles

Epreuve de MATHEMATIQUES II
Durée 2 Heures

Notations

On munit $\mathbf{R}^3$ de sa structure canonique d'espace vectoriel euclidien; on notera $< X , Y >$ le produit scalaire de 2 vecteurs X et Y de $\mathbf{R}^3$,

on rappelle que si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

alors $< X , Y > = {}^t X.Y = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$.

A toute matrice carrée réelle d'ordre 3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

on associe une forme différentielle sur $\mathbf{R}^3$ définie par

$$\omega = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}.x_i.dx_j$$

Il pourra être intéressant de noter dans certaines questions

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} , \; dX = \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} \text{ et } \omega = {}^t X.A.dX .$$

Etant donné $U = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ et $U' = \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$; $\mathbf{R}^3$ étant muni de sa structure affine, on notera les arcs paramétrés

$$S_u = \{ t.U \; / \; t \in [0,1] \}$$

$$\Gamma_{u,u'} = \{ \cos t.U + \sin t.U' \; / \; t \in [0,2\pi] \}$$

et on les orientera dans le sens des t croissants.

Préliminaires

Reconnaître S_u et $\Gamma_{u,u'}$ (on ne demande pas une étude détaillée de $\Gamma_{u,u'}$).

I

1.1 Déterminer les matrices A pour lesquelles la forme différentielle ω est exacte.

1.2 Lorsque ω est exacte, déterminer la fonction $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$, $(x_1,x_2,x_3) \longmapsto f(x_1,x_2,x_3)$

telle que $df = \omega$ et qui vaut zéro à l'origine.

1.3 Lorsque ω est exacte, calculer l'intégrale curviligne de ω sur S_u, puis sur $\Gamma_{u,u'}$.

Dans toute la suite du problème, on prendra pour matrice

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

et on notera ω la forme différentielle associée à A.

II

2.1 Calculer l'intégrale curviligne de ω sur le chemin S_u.

Montrer qu'il existe une matrice symétrique réelle C, que l'on exprimera en fonction de A et de ${}^tA$ telle que : $\forall U \in \mathbf{R}^3 \quad \int_{S_u} \omega = {}^tU.C.U$.

Justifier l'unicité de C.

2.2 Quelle est la borne supérieure de $\dfrac{{}^tU.C.U}{<U,U>}$ quand U décrit l'ensemble des vecteurs propres (non nuls) de C ?

2.3 Même question quand U décrit l'ensemble des vecteurs propres (non nuls) de A ?

2.4 Même question quand U décrit l'ensemble des vecteurs (non nuls) de $\mathbf{R}^3$?
(il peut être intéressant de se placer dans une base orthonormale qui réduit la forme quadratique $U \longmapsto {}^tU.C.U$).

III

3.1 Calculer l'intégrale curviligne de ω sur le chemin $\Gamma_{u,u'}$. Montrer qu'il existe une matrice antisymétrique réelle unique D, que l'on exprimera en fonction de A et de ${}^tA$, telle que :

$$\forall U \in \mathbf{R}^3,\ \forall U' \in \mathbf{R}^3 \quad \oint_{\Gamma_{u,u'}} \omega = {}^tU.D.U' .$$

3.2 A la matrice D on associe une forme différentielle ω_1 ; montrer qu'il existe un réel λ tel que, sur toute courbe fermée et de classe C^1 de $\mathbf{R}^3$, les deux formes différentielles ω_1 et $\lambda\omega$ ont la même intégrale curviligne.